Vorlesung Mustererkennung
Übungsblatt 24

Dorothe Dummy

1. Oktober 2012

Vorbemerkungen

Da es sich hier um die Vorlage der Lösung eines Übungsblattes geht, werden hier vorwiegend Formeln behandelt, insbesondere dabei die korrekte Darstellung. Außerdem wird auf die Unterteilung in Kapitel und Abschnitt verzichtet, da das nicht zu Übungsblättern passt. Daher eignet sich diese Vorlage auch sehr gut zum Einstieg in LaTeX.

Aufgabenteil a)

Was ist ein Muster? Gute Frage, denn ganz einfach ist die Definition nicht. Genau genommen ist sie eher grenzwertig, daher schauen wir uns die Grenzwertbildung genauer an:

$$mu_{st,er} = \lim_{\substack{G_{rafik}\to 0\\ B_{ild}\to\infty}} G_{rafik} B_{ild} \tag{1}$$

Dabei gilt: mu =Muster, B =Bild sowie G =Grafik.
Problematisch ist also vorwiegend die Unterscheidung zwischen Grafik und Bild. Dabei können auch Grafiken Bestandteile von Bildern enthalten und umgekehrt. Dabei spiel das Potential einer Darstellung die wesentliche Rolle. Dies lässt sich als Gleichung dargestellen:

$$\varphi_G(\vec{mu}) = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)} \frac{(\vec{mu}\cdot\vec{B})}{|\,\vec{mu}\,|^3} \tag{2}$$

Wichtig hierbei ist, dass wir nicht direkt auf Muster eingehen, sondern uns zunächst auf die Untersuchung von Bildern und Grafiken konzentrieren. Daher lassen sich dann anschließend Schlüsse ziehen, wie sich Muster erkennen und beschreiben lassen. Die ist jedoch ein sehr komplexes Thema, weshalb grafische Darstellungen hilfreich sein können.
$\rightarrow$ Folgende Darstellung soll den Wert von Abbildungen demonstrieren: Nicht zu vernachlässigen sind in Gleichung 2 die griechischen Buchstaben. Daher wollen wir uns diese

Abbildung 1: Ein klassisches Musterbild

noch einmal genauer anschauen.

$$\varphi_1 = \varphi_1(\vec{mu}) = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)} \frac{(\vec{mu} \cdot \vec{G_1})}{|\,\vec{mu}\,|^3} \tag{3}$$

$$\varphi_2 = \varphi_2(\vec{r} - \vec{d}) = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)} \frac{(\vec{r} - \vec{d}) \cdot \vec{p_2}}{\left|\,\vec{r} - \vec{d}\,\right|^3} \tag{4}$$

mit

$$\vec{p_1} = -\vec{p_2} = -\vec{p}$$

Damit ergibt sich unter der Berücksichtigung von Bild 1 sowie mit Hilfe der Gleichungen 2 und 4:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_D = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)} \cdot \left(\frac{(-\vec{mu} \cdot \vec{p})}{|\,\vec{mu}\,|^3} + \frac{(\vec{mu} - \vec{B}) \cdot \vec{G}}{\left|\,\vec{mu} - \vec{D}\,\right|^3} \right)$$

Sehr schön sieht man hier, dass es Gleichungen mit "Namen", also Nummern gibt. Dies ist sinnvoll, wenn man später noch einmal auf die Gleichung verweisen will. So gesehen ergibt sich daraus ein Muster, wobei sich die Unterscheidung zwischen Muster und kein Muster stark vereinfacht, wenn gilt:

$$\varphi_B \stackrel{!}{=} \underbrace{\frac{\vec{G}}{(4\pi\epsilon_0)} \cdot \left(\nabla \frac{1}{|\,\vec{mu}\,|} - \nabla \frac{1}{\left|\,\vec{mu} - \vec{G}\,\right|} \right)}_{= \frac{\vec{D}}{(4\pi\epsilon_0)} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\,\vec{mu}\,|} - \frac{1}{|\,\vec{mu} - \vec{G}\,|} \right)} \tag{5}$$

Da hier die ganze Zeit Vektoren zum Einsatz kommen, wollen wir diese jetzt genauer anschauen, um eventuell auch darin noch Muster zu finden:

$\vec{mu} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{G} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

Insgesamt kann man sagen, dass Muster gar nicht so einfach zu finden sind. Wenn man jedoch die Gleichungen 3, 4, 5 sowie 2 beachtet und dabei noch auf die Abbildung 1 verweist, so lässt sich doch einiges vereinfachen. Zu beachten ist außerdem, dass Muster in unserer bisheriger Betrachtung immer in drei Dimensionen betrachtet wurden. Im folgenden wollen wir das in einer Dimension fortsetzen.

Aufgabenteil b)

Nach Aufgabenteil a) sind Muster oft dreidimensional, doch gibt es auch Ausnahmen, diese kann man relativ einfach finden, wenn man erneut auf griechische Buchstaben eingeht:

$$\varphi_B = \frac{1}{(4\pi\epsilon_B)} \cdot \frac{1}{|\vec{r}|^5} \left[3\left(\chi_B\chi_G \cdot d_B p_G\right) - r^2 \cdot (d_B p_G)\right] \tag{6}$$

Auch lineare Muster kann man als Vektor angeben, was dann so aussieht: $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$

Der Vektor $\vec{d}$ hat also nur in der z-Komponente einen Eintrag. Daher verschwinden in Gleichung 6 alle anderen Komponenten und wir erhalten:

$$\varphi_B = \frac{1}{(4\pi\epsilon_B)} \cdot \frac{1}{|\vec{r}|^5} \left[3\left(z^2 \cdot bG_z\right) - r^2 \cdot (bG_z)\right] \tag{7}$$

Mit der Definition eines Musters

$$\vec{mu} = \lim_{\substack{d_B \to 0 \\ q_G \to \infty}} d_B q_G$$

erhalten wir für $b \cdot G_z$ den Wert $q \cdot b^2$ den wir mit allen bisherigen Erkenntnissen ergänzen und so folgendes Ergebnis für die Definiton einer mathematischen Beschreibung eines Bildes erhalten:

$$\varphi_B = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)} \cdot \frac{q \cdot b^2}{|\vec{r}|^5} \left[3z^2 - r^2\right] \tag{8}$$

Zumindest eine mathematische konsistente Beschreibung eines Bildes als Vektorpotential haben wir somit erhalten. Da Bilder sehr oft Muster enthalten, sind wir so einen Schritt weiter gekommen. Die Folgenden Definition und Berechnungen, die nötig sind, um unsere Schlüsse auf Muster zu übertragen bleiben nun dem geneigten Leser überlassen.